

勾配屋根における積雪量と落雪量の周期的な時間変化に関する 理論的考察

Theoretical considerations of snow on sloped roof with snowslide

眞山 博幸¹, 東 乙比古², 室崎 喬之¹, 吉田 光則³
Hiroyuki Mayama¹, Otohiko Azuma², Takayuki Murosaki¹, Mitsunori Yoshida³
Corresponding author: mayama@asahikawa-med.ac.jp (H. Mayama)

Time variations in amounts of snow and snowslide on sloped roofs under a constant rate of snowfall were discussed. Considering coupled time-differential equations, oscillating behaviors in the amounts of snow and snowslide were obtained, where the coupled time-differential equations are consisted of a first-order time differential equation of the amount of snow and a second-order time differential equation of the amount of snowslide. Furthermore, the oscillating behaviors were described as loops by suitable plots and the shapes and sizes of the loops reflect the calculation conditions.

1. はじめに

北海道では概ね 10 月中旬から 11 月上旬の時期に初雪が降り, 年末から年始にかけては気温が下がるとともにまとまった量の雪が降り, 1 月下旬から 2 月上旬の厳寒期を経た後のさっぽろ雪まつりの時期に一度気温が上がり, 2 月中旬から 3 月下旬までの時期は周期的な寒暖と降雪があり, 特に 3 月中旬以降では日中の気温上昇と直射日光による融雪が著しくなり, 4 月になるとほとんど降雪がない状況で融雪が進む¹⁾²⁾. このような条件下では勾配屋根のある家屋では様々な原因で落雪が起きる.

本研究では雪が降っている条件で勾配屋根上の積雪量と勾配屋根からの落雪量の周期的な時間変化に注目し, 理論的に取り扱うことを試みた. 具体的には, 一定の降雪量の下での勾配屋根上の積雪量と勾配屋根からの落雪量について連立微分方程式を考え, 積雪量と落雪量の周期的な時間変化を記述することを試みた.

2. モデルと結果

2. 1 定義

議論を始める前に定義を説明する. 図 1 に示したように時刻 t のときの勾配屋根への降雪量を $Q_{in}(t)$, 勾配屋根上の積雪量 $Q_{roof}(t)$, 勾配屋根からの落雪量 $Q_{out}(t)$ とすると, 単位時間当たりの降雪量 $dQ_{in}(t)/dt$ (降雪率と定義する), 積雪量 $dQ_{roof}(t)/dt$ (積雪率と定義する), 落雪量

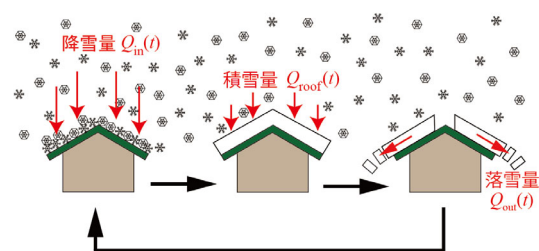


図 1 降雪条件下における勾配屋根上の積雪と落雪の周期的な時間変化 (模式図).

$dQ_{out}(t)/dt$ (落雪率と定義する) を考えることができる. 積雪率と落雪率の符号が正のときは増加, 負のときは減少を意味する.

次に勾配屋根上への降雪量 $Q_{in}(t)$, 勾配屋根上の積雪量 $Q_{roof}(t)$, 勾配屋根からの落雪量 $Q_{out}(t)$ を式で定義する. まず, $Q_{in}(t)$ は降雪率を積分した値に等しく, 以下ようになる.

$$Q_{in}(t) = \int_0^t \frac{dQ_{in}(t)}{dt} dt \quad (1)$$

同様に, 積雪量 $Q_{roof}(t)$ と落雪量 $Q_{out}(t)$ はそれぞれ積雪率と落雪率を積算したものとなり, 以下のようになる.

$$Q_{roof}(t) = \int_0^t \frac{dQ_{roof}(t)}{dt} dt \quad (2)$$

$$Q_{out}(t) = \int_0^t \frac{dQ_{out}(t)}{dt} dt \quad (3)$$

落雪が起きたときに積雪率と落雪率は変化をす

¹ 旭川医科大学 一般教育 化学

² NPO 法人 北海道産業技術支援協会

³ 北海道中小企業総合支援センター

Department of Chemistry, Asahikawa Medical University
Hokkaido Industrial Technical Service Association
Hokkaido Small Business Support Center

る。例えば、積雪率が正のときは(2)式に示されているように積雪量(積分値)が増加し、積雪率が負のとき積雪量は減少する。同じことは(3)式の落雪率と落雪量の関係でも成り立つ。(1)~(3)式は時々刻々変化する時間変化と総量の関係を表している。

2. 2 仮定

実際の勾配屋根上の積雪と落雪の現象は、気温の変化、単位時間当たりの降雪量の変化、屋根表面温度、勾配角度、勾配屋根の向き、日照条件、屋根表面材料等の様々な要因が関係している複雑な現象である^{3)~6)}。したがって、個々の要因を考慮した現実の現象を最初から理解することは困難であるので、現象のエッセンスを理解するために最も単純な仮定から出発することを試みた。

本研究では問題を単純化して現象全体を俯瞰するために以下の5つの仮定をした:①降雪率は一定である。②気温と屋根の温度は考慮しない。③勾配屋根の面積や形状や勾配角度等の因子は考慮しない。④降雪量、積雪量、落雪量の具体的な単位は考慮しない。これは降雪量、積雪量、落雪量をどの物理量(例えば質量、体積、高さ)にするのが妥当かは雪の状態に大きく依存するためである。⑤降雪量、積雪量、落雪量、降雪率、積雪率、落雪率、連立微分方程式の中の定数の値に現実的な意味はなく、あくまでも相対的な大きさで議論する。

2. 3 積雪量と落雪量の時間変化

上記の(1)~(3)式では降雪量、積雪量、落雪量を個別に記述したが、一方で積雪量がある一定の量に達すると落雪が起きることからも分かるように、落雪の条件は積雪量に関係している。落雪が起きたときに積雪量がどのように時々刻々と変化するか、これに加えて積雪量が増加したときに落雪量がどのように変化するかを考える必要がある。降雪量は仮定①に基づいて考える。

最初に積雪と落雪の関係を考える。ある時刻 t の積雪率を考えると、降雪率から落雪率を差し引いた値に等しいので、(4)式のようになる。

$$\frac{dQ_{\text{roof}}(t)}{dt} = \frac{dQ_{\text{in}}(t)}{dt} - \frac{dQ_{\text{out}}(t)}{dt} \quad (4)$$

(4)式の右辺の第1項と第2項の競合関係を考えると、次のようなことを記述できることが分かる。(4)式の右辺第1項目($dQ_{\text{in}}(t)/dt$)は降雪率

である。降雪率を(5)式のように定義する。

$$\frac{dQ_{\text{in}}(t)}{dt} = a \quad (5)$$

ここで a は正の定数である。

一方、(4)式の右辺第2項目($dQ_{\text{out}}(t)/dt$)は落雪率なので、落雪がないときはゼロ、落雪が起きるときだけ正の値になる。

2. 4 勾配屋根からの落雪の条件1~3と計算結果

(4)式では落雪が起きたときの積雪率について考えたが、積雪量が増加したときに落雪量がどのように変化するかについては何も説明していない。この問題を扱うために、積雪量が積雪上限値 $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ に達したときに落雪率が最大になると仮定して、落雪率の関数を考える。以下に条件1~3のそれぞれにおいて落雪率の関数を考えて、積雪量と落雪量が周期的に時間変化するかどうかを計算で確認した。

条件1: 最初に、以下の(6)式のように落雪率が積雪上限値と積雪量の差($Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} - Q_{\text{roof}}(t)$)に対して正規分布の依存性になると仮定した。

$$\frac{dQ_{\text{out}}(t)}{dt} = \frac{A_1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} \exp \left[-\frac{(Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} - Q_{\text{roof}}(t))^2}{2\sigma^2} \right] \quad (6)$$

(6)式中の A_1 と σ はそれぞれ定数と標準偏差である。正規分布は平均値で離れたところでも確率があるので、(6)式は $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ でしか落雪が起きない訳ではなく、 $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ よりも少ない $Q_{\text{roof}}(t)$ であっても落雪が起きることを意味している。つまり、少ない積雪量でも少量の落雪が起きることがあるこ

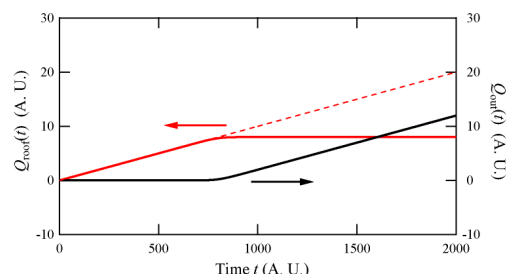


図2 条件1: (4)式と(6)式の連立微分方程式の計算結果。計算条件は $a = 0.01$, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$, $A_1 = 1$, $\sigma = 1$ である。赤実線は積雪量 $Q_{\text{roof}}(t)$ 、赤点線は落雪がない場合の $Q_{\text{roof}}(t)$ の変化、黒実線は落雪量 $Q_{\text{out}}(t)$ である。

とも記述できる. 標準偏差がどれくらい少ないところから落雪が起きるのかを決める.

図2は(4)式と(6)式の連立微分方程式から得られた計算結果である. 計算条件は $a = 0.01$, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$, $A_1 = 1$, $\sigma = 1$ である. $Q_{\text{roof}}(t)$ は最初は時間に比例して増加しているが, 一定値に達するとそのまま一定値を保って変化しない. $Q_{\text{out}}(t)$ は $Q_{\text{roof}}(t)$ が一定値に達するまでゼロのままであるが, その後は時間に比例して増加している. このように $Q_{\text{roof}}(t)$ と $Q_{\text{out}}(t)$ はいずれも周期的な時間変化を示さなかった. (4)式に(6)式を代入すると単なる1階微分方程式になるだけなので, 妥当な結果といえる.

条件2: 次に落雪量の時間変化の割合を(7)式の右辺のように加速度に相当する時間の2階微分方程式として記述した. これにより積雪量の変化に対して敏感に落雪が起きることを記述できる. さらに, 正規分布よりも $Q_{\text{roof}}(t)$ が $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ に近づくにつれて加速度が急激に増大して無限大に発散する性質をもつ4次の反比例の方が大きな時間変化が得られやすいと考え, (7)式を仮定した.

$$\frac{d^2 Q_{\text{out}}(t)}{dt^2} = \frac{A_2}{(Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} - Q_{\text{roof}}(t))^4} - B_2 \quad (7)$$

(7)式中の A_2 と B_2 は定数である. 右辺第一項目が $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ と $Q_{\text{roof}}(t)$ の差の4次の反比例の関係を示し, 右辺第二項目は計算結果のバックグラウンドの調整のために導入した便宜的な調整項である. (7)式が意味するところは $Q_{\text{roof}}(t)$ が $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ に達すると屋根上の積雪が一度に落雪するイメージである. なお, 4次の反比例は1つの仮定であり, 必須条件ではない.

図3は(4)式と(7)式の連立微分方程式から得られた計算結果である. 計算の条件は $a = 0.01$, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$, $A_2 = 5 \times 10^{-6}$, $B_2 = 5 \times 10^{-6}$ である. 上向きのスパイク状の周期的な時間変化を示している $Q_{\text{roof}}(t)$ が得られ, $Q_{\text{out}}(t)$ もバックグラウンドが時間とともにわずかに減少した後に増加しているものの, 挿入図で示したように周期的な時間変化を示す振る舞いが得られた. $Q_{\text{roof}}(t)$ と $Q_{\text{out}}(t)$ はともに周期的な時間変化を示しているので, (6)式ではなく(7)式のように落雪率を加速度に相当する量で扱うことが妥当であることが分かった.

条件3: 条件2で $Q_{\text{out}}(t)$ は周期的な時間変化を示しているものの, $Q_{\text{out}}(t)$ のバックグラウンドも増

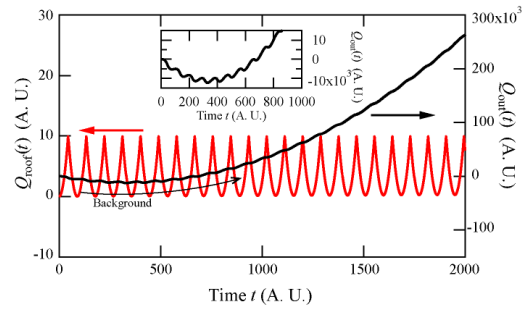


図3 条件2: (4)式と(7)式の連立微分方程式の計算結果. 計算条件は $a = 0.01$, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$, $A_2 = 5 \times 10^{-6}$, $B_2 = 5 \times 10^{-6}$ である. $Q_{\text{roof}}(t)$ (赤実線, 左縦軸)と $Q_{\text{out}}(t)$ (黒実線, 右縦軸)の時間変化. 挿入図は $Q_{\text{out}}(t)$ の時間変化の拡大図である.

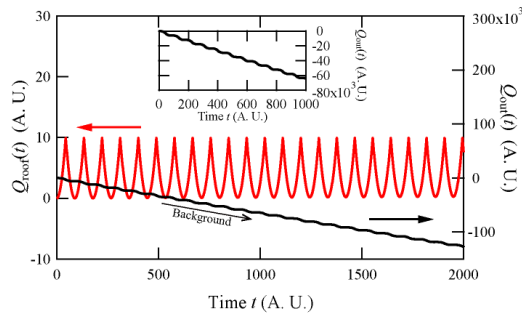


図4 条件3: (4)式と(8)式の連立微分方程式の計算結果. 計算条件は $a = 0.01$, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$, $A_3 = 5 \times 10^{-6}$, $B_3 = 5 \times 10^{-6}$, $C_3 = 0.01$ である. $Q_{\text{roof}}(t)$ (赤実線, 左縦軸)と $Q_{\text{out}}(t)$ (黒実線, 右縦軸)の時間変化. 挿入図は $Q_{\text{out}}(t)$ の時間変化の拡大図である.

加している. このバックグラウンドの補正を考慮した(8)式を仮定した.

$$\frac{d^2 Q_{\text{out}}(t)}{dt^2} = \frac{A_3}{(Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} - Q_{\text{roof}}(t))^4} - B_3 - \frac{C_3}{t} \quad (8)$$

A_3 , B_3 , C_3 は定数である. 右辺の第三項目が時間とともに増加する $Q_{\text{out}}(t)$ のバックグラウンドを補正するために便宜的に導入した項である.

図4は(4)式と(8)式の連立微分方程式から得られた計算結果である. 計算の条件は $a = 0.01$, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$, $A_3 = 5 \times 10^{-6}$, $B_3 = 5 \times 10^{-6}$, $C_3 = 0.01$ である. 挿入図に示されているように $Q_{\text{out}}(t)$ は周期的な時間変化を示しているが, $Q_{\text{out}}(t)$ は時間とともにバックグラウンドは減少していて, 図3のバックグラウンドの時間変化とは異なっている.

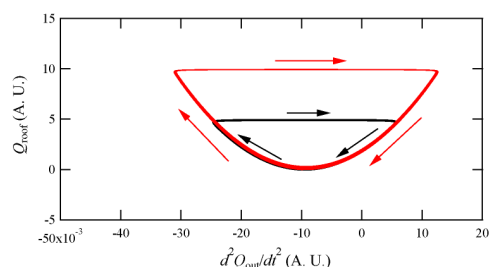


図5 条件3 : $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$ (赤) と $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 5$ (黒) のときの計算結果を縦軸 $Q_{\text{roof}}(t)$, 横軸 $d^2Q_{\text{out}}(t)/dt^2$ をとってプロットしたときに得られた閉じた軌道. 黒の軌道は赤の軌道と重なっていて見えない部分がある.

3. 周期的な積雪と落雪の可視化の試み

本研究の目的である積雪量と落雪量の周期的な時間変化を記述する試みについて, 積雪量の1階微分方程式と落雪量の2階微分方程式を組み合わせた連立微分方程式を考えればよいことが見出された. さらに一步進めて現象全体を分かりやすく俯瞰する方法を探索した.

周期的な時間変化が観察される現象として, カオスが知られている. カオスの周期的な現象では適当な物理量を縦軸と横軸に取って実験結果や計算結果をプロットすることで閉じた軌道(アトラクター)を描き, 軌道の大きさや形状から現象全体を俯瞰する手法を採用している⁷⁾. この手法に倣って条件3の計算結果を縦軸 $Q_{\text{roof}}(t)$, 横軸 $d^2Q_{\text{out}}(t)/dt^2$ でプロットすると, 図5のような閉じた軌道が得られた. $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 10$ のときの結果(赤の軌道)と $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}} = 5$ のときの結果(黒の軌道)を比較すると, $Q_{\text{roof}}^{\text{limit}}$ の値に依存して軌道の大きさが異なることが示されている. 図5のように実際の観測結果をプロットして軌道にすると, 降雪, 積雪, 落雪の条件だけではなく, 気温の変化, 単位時間当たりの降雪量の変化, 屋根表面温度, 勾配角度, 勾配屋根の向き, 日照条件等といった様々な情報が軌道の大きさや形状に反映されると予想される.

4. まとめ

単純な仮定を設定し, 一定の降雪率の条件下での勾配屋根上の積雪・落雪に関する周期的な時間変化を理論的に記述することを試みた. 積雪量の速度に相当する1階微分方程式と落雪量の加速度に相当する2階微分方程式からなる連立微分

方程式を考えることで, 積雪量と落雪量の周期的な時間変化を記述できることを見出した. 今後の研究では観測結果に合わせて落雪量の2階微分方程式を決定することが重要である. また, 積雪と落雪の時間変化を閉じた軌道として描くことで現象全体を俯瞰できる可能性も提案した. このような観点で降雪・積雪・落雪の現象を考えると, 現象の詳細のみに注目した部品論ではなく, システム論を俯瞰できる. 現象全体の見通しがよくなることで部品論に還元できる可能性があり, 実用の立場からみても有益な知見が得られると期待される. また, 降雪がある下で積雪量と落雪量が周期的に変化する現象は物質とエネルギーの出入りのある条件下で起きる心臓の拍動のような非線形現象とも考えることができ⁸⁾, 物理学的にも大変興味深いテーマである.

【謝辞】

着雪氷勉強会において本研究の内容に関する議論の場を提供していただきました.

【参考文献】

- 1) 亀田貴雄, 高橋修平, 2017: 雪氷学, 古今書院, 99-108.
- 2) 伊東俊幸, 他4名, 2012: 2011年度冬季における岩見沢および三笠の屋根上積雪状態, 北海道の雪氷, **31**, 147-150.
- 3) 伊東俊幸, 深瀬孝之, 2020: 微小凹凸を設けた塗装金属板の滑雪性状, 北海道の雪氷, **39**, 17-18.
- 4) 伊東俊幸, 苫米地司, 2011: 屋根材の滑雪性能に対応した勾配屋根における暴露試験の滑落雪状況, 北海道の雪氷, **30**, 5-8.
- 5) 吉田光則, 他4名, 2003: 着雪氷防止技術に関する研究(第4報)一滑雪塗料の開発とその評価について一, 北海道立工業試験場報告, **302**, 87-91.
- 6) 吉田光則, 吉田昌充, 金野克実, 2000: 着雪氷防止技術に関する研究(第3報)一滑雪と材料表面の特性について一, 北海道立工業試験場報告, **299**, 13-17.
- 7) 例えば, 合原一幸, 2002: カオス学入門, 放送大学教育振興会, 44-56.
- 8) 吉川研一(監修), 森義人, 中田聡, 1994: 非線形現象, 産業図書.