

「雪の結晶は二つと同じものがない」のはなぜか？

Why is it that “No two snow crystals are alike” ?

油川英明 (NPO 法人 雪氷ネットワーク)

Hideaki Aburakawa

1. はじめに

古来、「雪の結晶は二つと同じものがない」と言われてきた。実際、古今東西の雪結晶の写真、例えば Bentley¹⁾や中谷²⁾の顕微鏡写真には同じものが見出されず、彼らもそのように語っている。著者もこれまで雪の結晶の写真を撮影してきたが、同じ形のものには未だ出会っていない。そして、それは何故かという問いに対して余り具体的な言及がみられないことから、本小論においては雪結晶の液相成長説³⁾をもとに、天然の雪雲では同じ形態の結晶をつくり出すことが極めて困難であるということについて試論を述べるものである。

さて、雪の結晶は中谷²⁾により「水蒸気が或る種の核に昇華作用によって凝縮した氷の結晶」と定義され、その成長条件が中谷ダイヤグラムとしてまとめられて今日に至っている⁴⁾。しかし、中谷のこの昇華成長説は不安定な水蒸気の過飽和が条件であり、特に水に対する過飽和は天然に存在し得ない現象である。さらに、昇華成長説により上空の雪雲のなかに二つと同じ雪結晶をつくり出すことのない成長環境を想定することは余りに不自然で容易なことではない。

一般に、天然の雪雲は飽和乃至は飽和に近い水蒸気を含む空気塊のなかに氷晶・雪結晶および過冷却雲粒などが混在している。雪雲のこれらの構成要素について各々検討を行うならば、雪結晶の形成について過冷却雲粒の他に妥当な要素が見当たらないわけである。そして、雪雲内の雲粒の分布が巨視的には一様で、微視的には非一様であるということも今回の課題に有利な自然現象であると言える。ただ、これまでは過冷却微水滴、つまり雲粒は霰などに見られるように氷球としてしか凍結しないと断定されてきたことから、それが枷となって雪結晶の液相成長説に対しては余り関心が向けられなかったのではないかと想像される。しかし、雪結晶が過冷却微水滴から直接的に生成し、そして周囲の微水滴を捕捉しながら成長することが示されるならば³⁾、雪の生成は昇華（気相）成長説から液相成長説へと転換できることになる。そして、雪の調査研究は液相成長を基に再構築される必要が生じるものと考えられる。

ところで、雪の結晶が上述のように生成するとして、結晶の成長形態は雲粒の特性全般に影響を受けると考えられるが、ここではその一つとしての粒径分布を取り上げ、雪結晶の形態との関係について述べることにする。

2. 過冷却微水滴の捕捉による雪結晶の成長

過冷却微水滴による雪結晶の成長実験³⁾によれば、微水滴の固相化形態は単に過冷却度（温度）だけで決まるのではなく、水蒸気が凝結して微水滴を形成する過程での凝結速度などによって特徴づけられる。そして、それらの条件により過冷却微水滴は板状や柱状の結晶へと直接的に固相化するか、あるいは単に氷球状に凍結して霰などを形成する。天然の雪雲では単体の結晶に加え、これらの複合体やその中間型などが形成され、降雪となって観察されることになる。つまり、過冷却微水滴（雲粒）はその成長（凝結）の条件により凍結形態（結晶形）が決定されるとみなされるわけである。

ここで、図1は過冷却微水滴が氷晶・雪結晶へ成長する実験の一例を示したものである。この図は、ビデオカメラにより顕微鏡撮影された動画から各々の静止画を作製し、それらを経過時間の順に並べたものである。中央に位置した過冷却微水滴から氷晶が生成し、それが周囲の微水滴を取り込んで雪結晶へと成長している様子が分かる。このとき、結晶に取り込まれる微水滴の径の大小に応じて結晶の主枝や側枝の形が特徴づけられるように見受けられる。つまり、雪結晶の形態は捕捉する微水滴の粒径に関係して

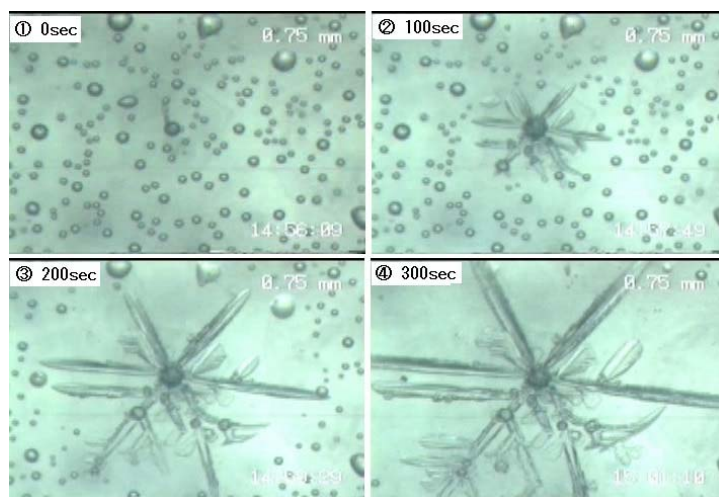


図1 過冷却微水滴による雪結晶の液相成長。中央のはじめに氷晶化する水滴の径は約 $30\mu\text{m}$ 。実験温度は -15°C 。

いることになる。さて、ひとつの雪雲のなかで多数の雪結晶が成長する場合、粒径分布が一樣で成長環境が平等であっても雲粒の径は非一樣であることから、雪結晶が捕捉する雲粒に大小の順序が生じることになり、そのことによって各々の結晶の形態に差異が生じることになる。

なお、図1の元動画は10倍速に編集され、インターネット上の映像ファイルとして保存されているので、以下から適当なブラウザによりダウンロード・閲覧が可能である。

<https://1drv.ms/f/s!As9IcXMRuXdAnThR8E5JU2MPuKG2>

3. 捕捉される雲粒の順列と雪結晶の形態数について

雪の結晶が多数の雲粒を捕捉して成長するということは、上記の実験のように過冷却微水滴が直接的に氷晶化することから、また、天然の雪結晶には雲粒の芯としての凝結核が無数に付着していることが Kumai⁵⁾により見出されたこと等々から、確かなことであると考えられる。ここで、雪結晶がどのような粒径の雲粒をどれほどの数、どのような順序で捕捉して成長するのかについて、今は結晶への付着箇所およびその時間間隔等は問わず、以下に考察してみよう。

雪雲内の雲粒の粒径分布については雲粒付雪結晶の観測などにより種々求められているが、ここでは図2に示されたような中谷²⁾の観測結果をひとつの典型と見なして採用する。これは正規分布のグラフとして示され、粒径の平均は $30\mu\text{m}$ と見なされている。また、雪結晶の質量 m は、雪の代表的な形態である普通樹枝を例とし、その平均の大きさ d を 2.5mm として、

$$m = 0.0038 \cdot d^2 (\text{mg})$$

により²⁾、その質量は 0.024mg と求められる。

これらの値から上記の雪結晶を形成するための平均粒径 $30\mu\text{m}$ の雲粒数 M を求めると、

$$M = \frac{0.024(\text{mg})}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{30}{2}\mu\text{m}\right)^3} = \frac{0.024 \times 10^{-3}(\text{g})}{1.413 \times 10^{-8}(\text{g})} = 1.699 \times 10^3$$

により1699個となる。そして、この雪結晶が完全に対称的な六花に成長すると仮定して、

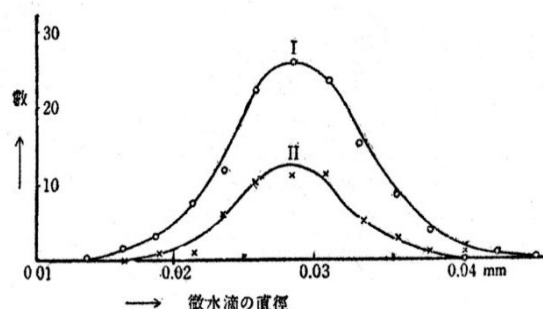


図2 二つの雪結晶（I，II）についての付着雲粒の粒径分布。（中谷，1949）

雲粒の数を 6 本の枝に均等配分すれば、各枝には $1699/6=283$ (個) が付着して結晶を成長させることになる。次に、この数量を図 2 の分布に沿って、今は仮に粒径 15, 20, 25, 30, 35, 40 μm ごとに比例配分すれば、各々の個数は次のように求められる。すなわち、15 μm が 1 個、20 μm が 14 個、25 μm が 68 個、30 μm が 117 個、35 μm が 68 個、40 μm が 14 個、45 μm が 1 個、という具合である。

先にも述べたように、雪雲内の結晶はこれら種々の粒径の雲粒をどのような順序で捕捉するかによって成長の形が決定されると考えられることから、ここで雪結晶に捕捉される雲粒に順番をつけ、その雲粒の捕捉順序、今の場合には上記のような 283 個の雲粒が雪結晶に捕捉される順序 (順列) によって結晶の成長形が決まるものとする。つまり、種々の粒径を有した雲粒群の順列が結晶形の数を表しているとみなすわけである。

一般に、総数 n 個のなかに p 個の同じもの、 q 個の他の同じもの、 r 個の他の同じもの、 $\dots$ があるとき、この n 個の全てを一行に並べて得られる順列の総数 α は、

$$\alpha = \frac{n!}{p! \times q! \times r! \dots}$$

ここで、 $n=p+q+r+\dots$ である。

これにより上記の粒径分布の雲粒について、その順列を求めると、

$$\alpha = \frac{283!}{1! \times 14! \times 68! \times 117! \times 68! \times 14! \times 1!}$$

となる。ところで、各々の数の階乗には相当に大きなものが含まれているので単純な演算により値を求めることは困難であることから、次の近似式によりそれらの値を求めることとする。すなわち、Stirling の公式

$$\log_e(k!) \approx k(\log_e k - 1)$$

を適用して

$$\alpha \approx \frac{10^{571}}{10^0 \times 10^{10} \times 10^{95} \times 10^{191} \times 10^{95} \times 10^{10} \times 10^0} = 10^{170}$$

と求められ、この結果から雲粒の捕捉順列、つまり雪結晶の可能な成長形の数 10^{170} 通りが考えられることになる。つまり、ひとつの雪雲 (上記の粒径分布の雲粒群) において、全く同じ形の雪結晶が出現する確率は $1/10^{170}$ という極めて小さな値となる。

この結晶数がどのような数量なのかを大略把握するために、年間の降雪の結晶数との比較を以下に試みることにする。まず、一年間に地球全域に降る雪結晶の数を求めると、地球の表面積を $514,458 \times 10^3 \text{ km}^2$ とし、また世界観測地 (41 カ国) の年平均降水量を 807mm/年 (国土交通省の資料[1971 年～2000 年]より) という値から、地球全体の年間降水総量は、

$$514,458 \times 10^3 \text{ km}^2 \times 807 \text{ mm} = 412,168 \times 10^{15} \text{ g} = 4.2 \times 10^{20} \text{ g}$$

となる。ここで、降雪は年間降水量の 1/2 とし、先の中谷²⁾の経験式から求められた平均の雪結晶 1 個の質量 ($2.4 \times 10^{-5} \text{ g}$) を採用して、これらの値から地球全域に降る一年間の降雪による雪結晶の数を求めると、

$$\frac{4.2 \times 10^{20} \times 0.5}{2.4 \times 10^{-5}} \approx 10^{25}$$

となり、その数はおおよそ 10^{25} 個となる。なお、Frank⁴⁾によればこの値は 10^{24} 個とされているが、算出の詳細が示されていないので、ここでは上記により求められた値を用いることにする。

さて、この値と順列により得られた結晶の数とにより $10^{170}/10^{25} = 10^{145}$ という値が得られることから、先に求められた雪結晶の数は 10^{145} 年にわたり形の異なったものをつくり出すことがで

きることになる。そして、地球の寿命が 10^{10} 年と言われていることから、求められた年数は地球が $10^{145}/10^{10}=10^{135}$ 回も生成・消滅を繰り返した末にはじめて同じ形の結晶を得る可能性があるというわけである。このことは、少なくとも今の地球上の人類について同じ結晶に巡り会う機会がほとんど無いということを物語っているわけである。結局、「雪の結晶は二つと同じものがない」ということは絶対であるとは言えないが、この地球の人類が「同じもの」に遭遇することは、過去・現在・未来にわたりおよそ無いであろうということである。

ここで、雲粒の粒径分布に関連して若干の捕捉を行うならば、先の六花の枝へ等分されるとした雲粒について「仮に」として各々の粒径の分割幅で配分を行ったが、この分割幅は順列の数に影響を与えるものであることから、その幅と順列の数との関係について述べることにする。

先の順列の数 α を求める式において、分割幅を小さく取れば区分数が増して分母の $p! \times q! \times r! \cdots$ の値は小さくなり、 α はより大きな値へとシフトする。逆に、分割幅を大きく取れば区分数が少なくなって分母の $p! \times q! \times r! \cdots$ の値は大きくなり、 α は小さくなる。前者の極限として、1 区分に 1 個の雲粒が分割される（雲粒の粒径が全て異なる）ならば、 $p! \times q! \times r! \cdots$ の値は 1 となって、順列の数 α は最大の $n!$ となる。本論の「仮に」の分割幅は比較的大まかに目盛られたものなので、実際にはより細かな分布幅、つまり区分数はより多くなることが予想され、従って順列の数（結晶の数）は今回求められた値よりは大きくなると考えられるわけである。つまり、本論において求められた結晶の数は天然に比して過小な見積もりであると言えることができる。また、後者の極端な例として雲粒が全て同じ粒径であるとすれば、 α を求める式の分母は $n!$ となり、 $\alpha = n!/n! = 1$ となって雪結晶の形はただ 1 つの同じものだけが成長するということになる。その例として、実験によるものであるが、ほぼ同一の結晶（完全に同じではない）が Libbrecht⁶⁾ により示されている。ただ、天然では過冷却雲粒の特性、今の場合は粒径だけに限っても、それが全て同じであるような雪雲を得ることは不可能に近いと言える。

4. おわりに

雪の結晶は、天然の降雪では同じ形のものを見出すことが極めて困難であるということについて、液相成長説を基に雲粒の粒径分布によって数量的な考察を試みた。今回の結果は雲粒の典型的な粒径分布を採用したいわば第一近似的なものであり、実際には雪雲の生成過程により種々の分布が存在することから、天然では本論において求められた結果を越えるものになることが予想される。また、雪結晶が過冷却雲粒の捕捉により成長とした場合、その形態は雲粒の特性、つまり凝結過程、過冷却度、環境温度、粒径等々の多くの要素に依存すると考えられることから、実際には結晶の形態はより複雑で多様なものになるであろうと考えられる。

さらに、今回は雪結晶が六花型の完全な対称形であると仮定したが、一般的には対称性に欠けるものの方が多いので、結晶の形態数はさらに大きな値が見積もられるものと推察される。

【参考・引用文献】

- 1) Bentley, W. A. and W. J. Humphreys, 1931: Snow Crystals, McGraw-Hill Book Co., New York
- 2) 中谷宇吉郎, 1949: 雪の研究, 岩波書店, 東京, pp.161
- 3) 油川英明, 2014: 中谷現象としての人工雪の生成, 北海道の雪氷, **33**, 113-116
- 4) Frank, F. C., 1983: Snow Crystals, *Contemporary Physics*, **23**, 3-22
- 5) Kumai, M., 1951: Electron Microscope Study of Snow Crystal Nuclei, *J. Meteor*, **8**, 151-156
- 6) Libbrecht, K. G., 2016: <https://www.nytimes.com/2016/01/23/science/who-ever-said-no-two-snowflakes-were-alike.html> (参照日: 2018 年 6 月 21 日)