雪結晶のフラクタルについて（その１）

安武　学（砂川市役所）・油川　英明（北海道教育大学・岩見沢）

1　はじめに

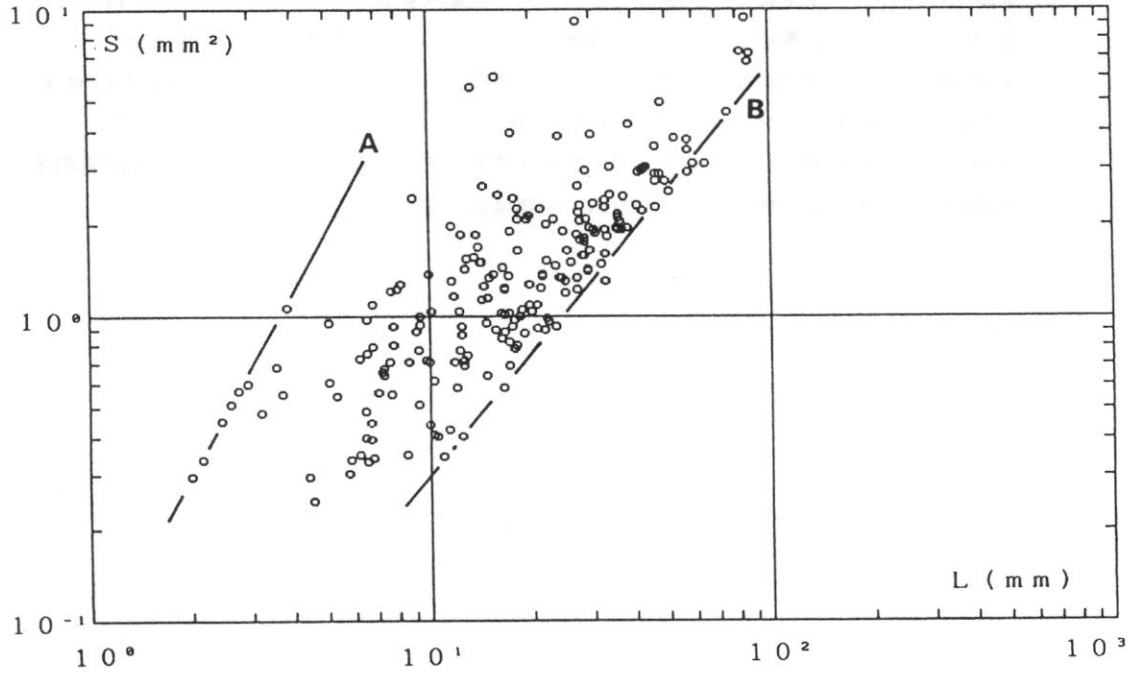
雪の結晶は２つと同じものがないといわれるほど多様であるが、中谷(1946)により４０ほどに分類が行われ、さらに、それらの生成条件が「中谷ダイヤグラム」により示されたことにより、雪の形態が集大成された。その後、孫野・李(1966)は中谷の分類を基に、気象学的な観点から、８０ほどに細かく分類を行った。これらの分類はいずれも雪結晶の形を視覚的、定性的に表現したもので、多様な結晶を概括的に把握する上では適切であり、分類の名称から結晶の形を容易にイメージすることができるという利点を有している。

一方、雪結晶の千差万別な形がどのようにして形成されるのかについては、これまでにも多くの研究がなされて来ているが、この課題にアプローチするとき、結晶の形態に関わる数量的な分析が不可欠なことであると考えられる。その端緒として、結晶の形をより具体的、定量的に把握するため、雪の形に関してフラクタル的解析を試みた。

雪結晶の形が定量的で意味のある数量として表現されれば、雪結晶の形態に関する量的な解析や、結晶の形とそれを決める因子、例えば温度との定量的な関係を見いだすことが可能になるのではないかと考えられる。

2　雪結晶のフラクタル次元について

雪結晶のフラクタル次元は回転半径法により求められた。この方法によれば、結晶の形を決めている要素数に相当するものとして、雪結晶の輪郭の長さ（Ｌ）をとり、その要素が存



図－１　板状雪結晶の輪郭の長さ（Ｌ）と結晶の投影面積（Ｓ）の関係

在する領域を、円に相当する面積と考えたときの回転半径（＝フラクタル次元　D）ー実際には、その雪結晶の投影面積（S）に相当する円の半径ーとの間に　$S \sim L^{2/D}$　が成り立てば、その形はフラクタルな図形と見なすことができ、S－Lのグラフからフラクタル次元Dの値を求めることができるというものである。

フラクタル次元を求めるための雪結晶の資料は、中谷の「雪の研究」（1946)の図版より209枚の写真を利用した。これらの図版は分類の名称や写真の倍率が明示されているので、今回の解析の資料としては極めて適当しているものであった。また、これらの雪結晶の輪郭の長さとその面積は、デジタイザーによって結晶の形をパーソナルコンピュータに入力することにより、その図形の演算処理から求められた。図形は手動入力のため、その座標値には誤差が予想されるわけであるが、矩形入力のテストから、輪郭の長さと面積の誤差はそれぞれ±0.8%及び±2.3%という値が得られた。この程度の誤差範囲ではフラクタル次元を求める上で障害になることはないものと判断される。

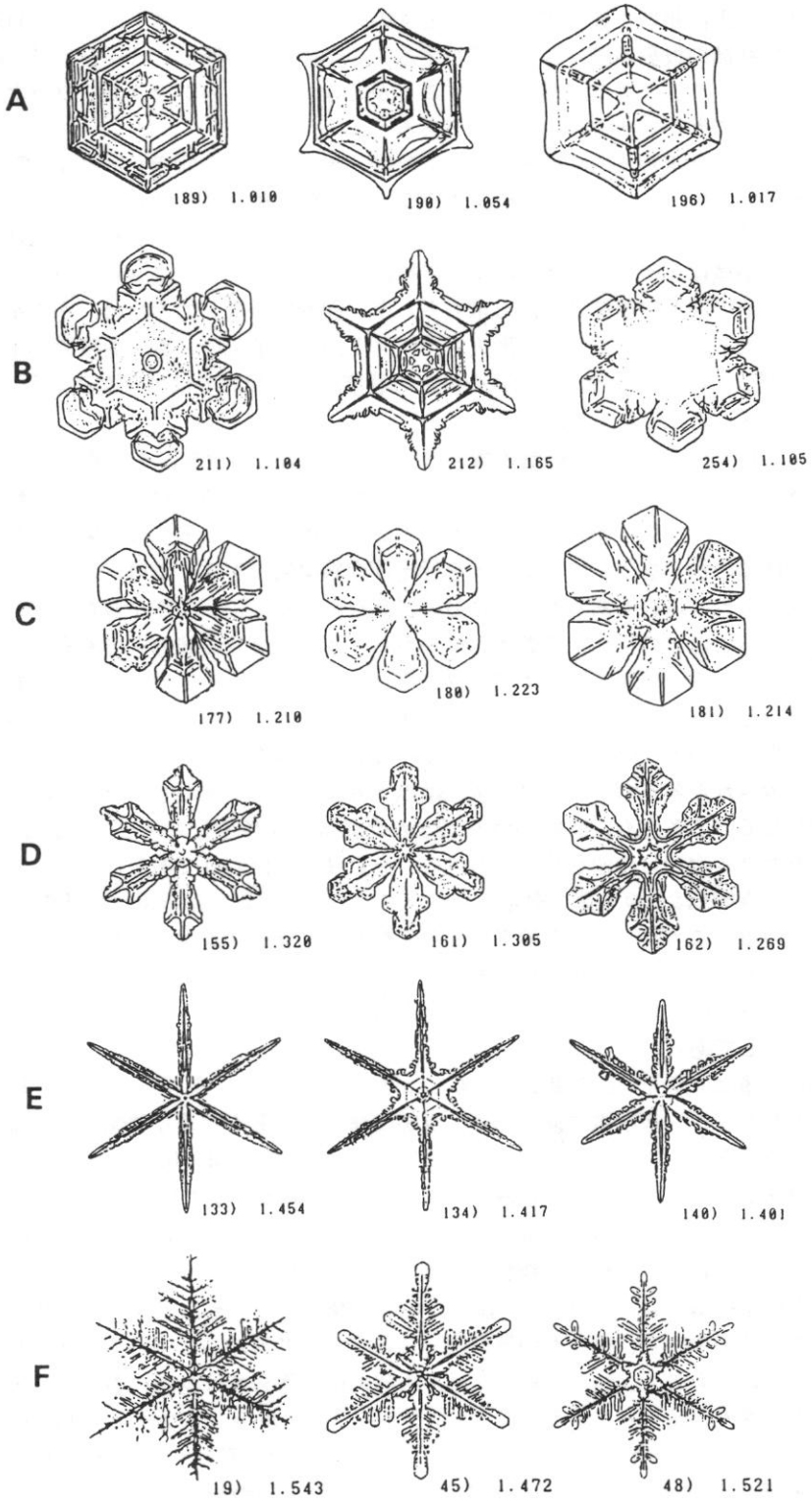
このようにして求められた雪結晶の輪郭の長さと投影面積の値を、まとめて図ー1に示す。これらの点は角板から羊歯状結晶まで、中谷の分類による典型的な板状結晶の種類についてプロットしたもので、広い範囲に散在していることが示されている。この場合、樹枝状とか扇形とか、結晶の種類を限ってプロットを行えば直線関係のグラフが得られ、その勾配からDの値が求められる場合もあるが、図において見られるように、各点が散在していることから、結晶によってはどの種類に分類すべきか戸惑うような境界領域のものも多い。このことから、必ずしも従来の分類に則ってグラフが描けないので、ここでは、結晶の種類に応じたDを求めるのではなく、その種類にこだわらず、単純にグラフ上から演算によりDの値を求め、その結果について従来の分類による結晶の種類と比較をすることにした。

図ー1に示された各点のフラクタル次元は以下のようにして求められた。すなわち、相当に広く散在している各点も、直線AとBに囲まれた領域内に存在していることから、このAとBによるフラクタル次元Dの値を基に、各点のDを見積もったわけである。

ところで、直線Aは角板の値を網羅したグラフであり、直線Bは羊歯状結晶の値によるグラフとなっている。この時、これらのグラフの勾配からフラクタル次元Dを求めると、それぞれ1.00、1.55となり、直線AからBに移るに従って雪結晶の形が複雑になっていることが数値上でも示される。尚、角板のフラクタル次元がこのような値になることは、図形の計算上からも当然のことである。

各点のDの値は直線AとBの値から求めるわけであるが、その算出にあたり以下の仮定を設けた。すなわち、1）板状雪結晶の形は、単純な角板から最も複雑な羊歯状結晶まで、その変化は連続的であるものと考え、図ー1のAとBの2つの直線間の値（各点）は連続的に変化するものであること、2）各点を通るグラフはAやBと同様に全て$S \sim L^{2/D}$の関係で表すことができること、3）ある点を通るグラフのDの値は、A、B二直線の値（1.00、1.55）の間にあり、かつそれらの直線から離れた距離に比例していること、である。

これらの仮定に基づき、200余の結晶について計算を行い、それぞれのフラクタル次元の値Dを求めた。その中から、幾つかの例を図ー2に示す。各雪結晶は中谷の図版（1946）からコピーされたもので、結晶の右下には、中谷の図版番号を片括弧の数字で、その右側にはフラクタル次元が示されている。図のAのグループは「角板」でフラクタル次元は1.0台の値、Cは「扇形」で1.2台、Dは「広幅六花」で1.3台、Eは「星状」で1.4台、Fは「樹枝状」及び「羊歯状」で1.5台と分類された。ここで、Bは従来「樹枝付き角板」等に分類されていたものであるが、フラクタル次元ではAとCの中間の1.1台となっていることから、別のグル



図－２　種々の雪結晶とそのフラクタル次元（右側の数字）

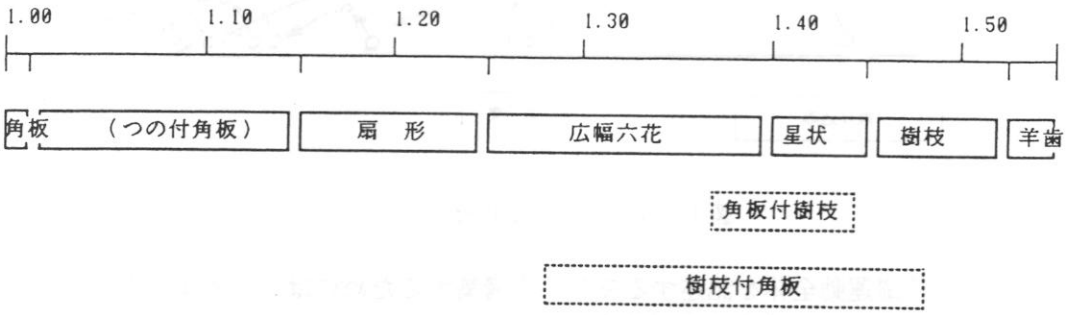
ープとして分類した。

また、フラクタル次元の数値によれば、原理的には結晶ひとつひとつの区別が可能となる。例えば、図－2において、Dのような形の結晶はこれまで「広幅六花」と一括して呼称されてきたが、この中でも形はそれぞれ異なっているわけで、そのことはフラクタル次元Dの値に表されたいる。換言すれば、フラクタル次元は雪結晶の「アイデンティティ」を示しているということになるかも知れない。

図－3は、各雪結晶について求められたフラクタル次元の値をまとめて、従来の中谷の分類と対比したものである。先にも述べたように、雪結晶の形は鮮明な境界が存在するものではなく、フラクタル次元の数値は「角板」の1.00から「羊歯状」の1.55まで連続的に変わっている。それ故、従来の分類をフラクタル次元で数値的に表すことは必ずしも容易なことではないが、図－3に示したように、おおよその目安では以下のようになる。

「角板」　1.00～1.01　　「角板ー扇形の中間（つの付角板）」　1.01～1.15
「扇形」　1.15～1.25　　「広幅六花」　1.25～1.40　　「星状」　1.40～1.45
「樹枝状」　1.45～1.52　　「羊歯状」　1.52～1.55

尚、中谷の分類における「角板付樹枝」及び「樹枝付角板」は、フラクタル次元ではそれぞれ1.37～1.44、1.28～1.48という値の領域になり、「広幅六花」から「樹枝状」までの範囲に重なっていて、固有の数値範囲を見出すことができなかった。これらをフラクタル次元上どのように位置づけるかは今後の課題と考えられる。



図－3　雪結晶のフラクタル次元と中谷の分類の対応

3　おわりに

板状雪結晶の輪郭の長さと投影面積の関係から固有のフラクタル次元が求められ、結晶の形態として自己相似性を有しているということができる。雪結晶のフラクタル次元は、中谷の図版を資料として用いた限りにおいては、1.00～1.55までの値にあり、結晶は形に応じてこの範囲で連続的に変化していた。

幾つかの仮定に基づいて、各々の結晶についてフラクタル次元が求められた。これらを従来の分類と対応させたところ、基本的な結晶の形についてはおおよその数値的関係を得ることができた。

フラクタル次元ではひとつひとつの結晶が具体的な数値で示されることから、従来の分類では表現が困難な、同じグループにおける結晶の「固有性」を表すことが可能である。